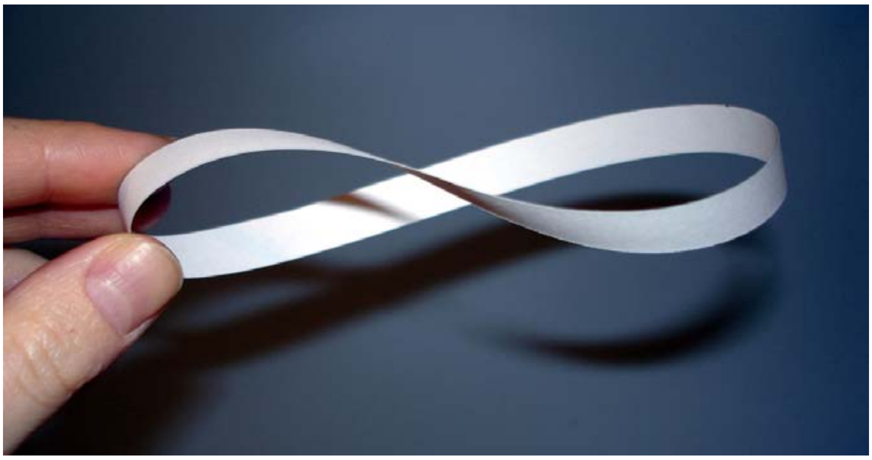
DOTKNĄĆ I ZOBACZYĆ NIESKOŃCZONOŚĆ

MAGDALENA RUCKA



/fot. M. Rucka/

GDAŃSK, 2005

1. Wstęp

Pojęcie nieskończoności, tak ważne zarówno dla matematyki, jak i wszelkich innych dziedzin nauki i życia, intrygowało filozofów i matematyków już od starożytności.

Podczas programowania w języku MATLAB, największą liczbą, do jakiej użytkownik ma dostęp, jest $17976931348623157 \cdot 10^{308}$, czyli zapisując inaczej:

1797693134862315700000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000.

Ciężko ocenić czy to jest duża liczba, czy mała, z pewnością jednak jest skończona. Jej wielkość można dostrzec na przykład poprzez porównanie z liczbą atomów we wszechświecie obserwowalnym, która została oszacowana jako $6 \cdot 10^{78}$, czyli „tylko”:

600000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000.

Zawsze możemy wyobrazić sobie liczbę większą od danej o jeden, i jeszcze o jeden, i tak w nieskończoność. Zawsze również możemy podzielić myślowo daną całość na połowę, i znów na połowę, i tak w nieskończoność. Wszystko to jednak dzieje się w naszej wyobraźni. Ale czy nieskończoność jest tylko hipotezą, wyobrażeniem, czy też istnieje fizycznie, namacalnie? Wiemy przecież, że liczba atomów w obserwowalnym wszechświecie jest skończona. Wiemy też, że żadne ciało posiadające masę nie może przekroczyć, a nawet osiągnąć pewnej granicznej prędkości zwanej prędkością światła. Jest nam znany również fakt, iż materii nie można dzielić w nieskończoność, a jedynie na cząstki elementarne.

/fot. M. Rucka/

Wydaje się zatem, iż nie ma potwierdzenia w świecie rzeczywistym na istnienie rzeczy nieskończenie małych ani nieskończenie wielkich. Ale nieskończoność można zobaczyć! Wystarczy ustawić naprzeciw siebie dwa lustra i zapatrzeć się w tunel nieskończonych odbić powstałych w jednej chwili.

Esej ma na celu przedstawienie wybranych poglądów na temat nieskończoności na przestrzeni dziejów matematyki i filozofii. Niech wystarczającym powodem celowości tych rozważań będzie myśl Hilberta:

> „Nieskończoność – pisze Hilbert – jak żaden inny problem – zawsze głęboko poruszała ludzkie dusze. Nieskończoność, jak żaden inny problem, wywierała płodny wpływ na umysł. Ale nieskończoność, również jak żadne inne pojęcie, domaga się rozjaśnienia” [3].

2. Starożytni myśliciele greccy

Filozofia europejska miała swój początek w filozofii przyrody. Na przełomie VII i VI wieku p.n.e. w Grecji zdobyto się na odwagę, by podjąć próbę samodzielnego zrozumienia świata bez odwoływania się do wierzeń religijnych. Jednym z pierwszych dokonań było myślowe rozłożenie otaczającego świata na najprostsze składniki. Najbardziej elementarna część została określona terminem *arche*. **Arystoteles** (384 – 322 p.n.e.) tak pisał o *arche*:

> „Wydaje się bowiem, że najbardziej elementarne ze wszystkich ciał jest to, z którego, jako pierwszego, powstają przez łączenie wszystkie inne” [1].

Według starożytnych Greków *arche* musiało mieć zarówno właściwość nieskończoności (bo z niego wyłania się wszystko), jak też właściwość nieokreśloności (bo daje początek różnorakim bytom).

Arystoteles jako pierwszy jasno sformułował problem nieskończoności rozróżniając dwa jej rodzaje w matematyce: nieskończoność aktualną i nieskończoność potencjalną. Nieskończoność potencjalną rozumiał on jako coś, co w danym momencie zawiera zawsze skończenie wiele elementów, ale może być dowolnie powiększane poprzez kolejne podziały. Nieskończoność aktualną natomiast pojmował jako wielość składającą się aktualnie z nieskończenie wielu elementów, która nie ulega zmianie, powiększaniu poza każdą skończona granicę. Arystoteles dopuszczał istnienie tylko potencjalnej nieskończoności, twierdząc, że „nieskończoność aktualna jest w matematyce zbędna” [5]. Przyjmował więc możliwość nieograniczonego podziału odcinka na części czy też przedłużania dowolnego ciągu liczb naturalnych nie dopuszczając jednocześnie istnienia takiego ciągu liczbowego w formie zakończonej całości, traktowanej jako odrębny przedmiot (czyli nie przyjmował istnienia tego, co dziś nazywamy zbiorem liczb naturalnych).

W *Fizyce* Arystoteles stwierdził, że jeżeli nieskończoność byłaby samą substancją, to charakteryzowałaby ją niepodzielność, bo to, co jest podzielne musi być albo wielkością albo mnogością:

> „Jak widać z powyższego, nieskończoność nie może istnieć jako byt aktualny, ani jako substancja, ani jako zasada; albowiem każda dana jej część byłaby nieskończona” [2].

Grecki filozof zauważył, że całkowite odrzucenie nieskończoności spowodowałoby różne, niemożliwe do przyjęcia, konsekwencje jak np. początek i koniec czasu czy niemożność podziału wielkości na części. Stwierdził zatem, że nieskończoność istnieje potencjalnie. Przyjmował jednak, że nie istnieje nieskończoność przez dodawanie w sensie przekraczania wszelkiej wielkości, a jedynie przez odejmowanie; bowiem w kierunku zmniejszania można przekroczyć każdą wielkość, ale w kierunku zwiększania nie ma wielkości nieskończonej:

> „W dziedzinie wielkości rzecz ma się na odwrót. Co jest ciągłe, jest też podzielne w nieskończoności, nie ma natomiast nieskończoności w kierunku zwiększania; albowiem wielkość, która może istnieć potencjalnie, może również istnieć aktualnie. A skoro żadna wielkość postrzegalna zmysłowo nie jest nieskończona, przeto nie może istnieć wielkość, która by przekraczała wielkość określoną; gdyby to było możliwe, wówczas mógłby istnieć twór większy od nieba” [2].

---

[1] Arystoteles, *Metafizyka*, PWN, Warszawa 1983, tłum. K. Leśniak [2].
[2] Arystoteles, *Fizyka*, PWN, Warszawa 1968, tłum. K. Leśniak [5].

Rozróżnienie Arystotelesa na nieskończoność potencjalną i aktualną zostało zaakceptowane przez tradycje zarówno matematyczną, jak i filozoficzną i było uznawane przez całe dzieje tych dwu nauk.

Problem nieskończoności poruszał również **Euklides** (365 – 300 p.n.e.) w *Elementach*, podając podstawowe definicje, postulaty i aksjomaty, na bazie których powstał pierwszy system geometrii. Ze względu na zagadnienia nieskończoności ciekawe są dwie pierwsze definicje:

„1. Punkt jest tym, co nie ma części lub nie ma żadnej wielkości.
2. Linia to długość bez szerokości" [5].

Euklides zdefiniował punkt, jako coś, co nie ma żadnego wymiaru. „Według jednej z koncepcji, rozwiązującej kwestię wymiaru odcinka, odcinek był zbudowany z punktów – części niepodzielnych. Takich elementów, z których składałoby się kontinuum liniowe, miało, według wspomnianej koncepcji, być nieskończenie wiele" [1]. Pojawił się jednak problem długości takiego odcinka składającego się z punktów. Jeżeli składałby się on z elementów o zerowej mierze, to sam odcinek też miałby zerowa miarę. Jeżeli natomiast odcinek byłby zbiorem nieskończonym elementów o mierze różnej od zera, to byłby on odcinkiem o nieskończonej mierze.

O nieskończoności rozprawiał także **Proklos** (410 – 485) zauważając własność zbiorów nieskończonych polegającą na tym, że zbiór nieskończony może mieć tyle samo elementów, co jego podzbiór. Próbował on wyeliminować tę, jego zdaniem paradoksalną, cechę poprzez odrzucenie istnienia obiektów aktualnie nieskończonych i przyjęcie jedynie nieskończoności potencjalnej. Uznawał on możliwość dzielenia w nieskończoność, ale nie na nieskończenie wiele części. Był to „typowy dla myśli greckiej sposób eliminowania trudności związanych z pojęciem nieskończoności" [6].

„Średnica dzieli koło na dwie równe części. Jeżeli jednak za pomocą jednej średnicy powstają dwa półkola i jeżeli przeprowadzić przez środek nieskończenie wiele średnic, to okaże się, że półkoli będzie dwa razy więcej niż nieskończenie wiele. Niektórzy widzą w tym aporię nieskończonego dzielenia wielkości. My jednak twierdzimy, że wielkości są wprawdzie dzielone w nieskończoność, ale nie na nieskończenie wiele części (*ad infinitum, sed non in infinita*)" [3].

3. Mikołaj z Kuzy

Nieskończoność u Mikołaja z Kuzy (1401-1464) pojawiała się w rozważaniach matematycznych oraz teologiczno-filozoficznych. Filozof ten zajmował się nieskończonością w matematyce, aby poznać nieskończoność Boga. Wyrażał on pogląd, iż nie jest możliwe poznanie nieskończoności za pomocą zmysłów, ponieważ rzeczy poznawalne zmysłowo nie mogą być powiększone do nieskończoności. Twierdził natomiast, że nieskończoność w matematyce można uchwycić przez umysł za pomocą pojęć. Jako przykład podał wielokąt foremny wpisany w okrąg. Jeżeli liczba boków wielokąta rośnie do nieskończoności, to uzyskiwane jest coraz lepsze przybliżenie okręgu. Okrąg, który nie jest poznawalny zmysłami, istnieje tylko w ludzkim umyśle. Oba te kształty – okrąg i wielokąt pokrywają się dopiero w nieskończoności. Według Mikołaja dopełnienie procesu (*coincidentia oppositorum*) jest wieczne, jest najwyższą formą bytu. „Każdy proces bowiem dąży do swego wypełnienia" [6].

Mikołaj z Kuzy odwrócił dotychczas przyjmowany porządek myślenia. Nie uważał, jak uważano dotychczas, że nieskończoność bierze swe istnienie ze skończoności, ale przeciwnie,

[3] Proklos, *Kommentar zum ersten Buch von Euklides „Elementen"*, Halle (Saale) 1945, z niem. tłum. R. Murawski [5].

opowiadał się za tym, że to, co nieskończone jest pierwsze i tylko za pomocą nieskończoności można pojąc skończoność. Pisał, że „wszystko, co skończone, ma swe źródło w zasadzie nieskończoności” [6].

4. Blaise Pascal

Pascal (1623 – 1662) zdefiniował dwie nieskończoności – nieskończoność wielkości i nieskończoność małości. Twierdził on, iż wszystko (przestrzeń, czas, liczby, prędkość, itp.) można zwiększać bądź zmniejszać w nieskończoność:

> „Jakkolwiek bowiem prędki byłby jakiś ruch, możemy sobie wyobrazić ruch jeszcze prędszy, ten z kolei przyspieszyć jeszcze bardziej i tak dalej w nieskończoność. Nie dojdziemy przy tym nigdy do takiego ruchu, którego nie można by już dalej przyspieszyć. Także i w przeciwnym razie, jakkolwiek powolny byłby jakiś ruch, można go jeszcze zwolnić, potem znowu – i tak dalej w nieskończoność i nigdy nie osiągniemy tak znikomej prędkości, by nie można było przejść nieskończenie wielu jeszcze mniejszych, nie dochodząc jednak do stanu spoczynku” [4].

Podobnie jest z czasem, który to można sobie wyobrażać coraz to dłuższy, bądź krótszy nie dochodząc nigdy do nicości czasu. Pascal zauważył, że żadnej z tych prawd nie da się dowieść, lecz nie z uwagi na ich niejasność, lecz przeciwnie – ze względu na ich niezwykłą oczywistość. Jednocześnie obiecywał wszystkim tym, którzy uwierzą w prawdę dwóch nieskończoności, zdolność poznania samych siebie:

> „Tym jednakże, dla których prawdy te staną się jasne, owa dwojaka, otaczająca nas ze wszech stron nieskończoność, ukaże zdumiewający ogrom i potęgę natury; zdolni będą poznać samych siebie, kiedy rozważą tę rzecz zadziwiającą, kiedy zobaczą, że znajdują się pomiędzy nieskończonością, a nicością przestrzeni, między nieskończonością a nicością liczby, między nieskończonością a nicością ruchu, miedzy nieskończonością, a nicością czasu. Może ich to nauczy mierzyć właściwą miarą samych siebie i nasunie myśli cenniejsze niż wszystko to co poza tym znaleźć można w geometrii” [4].

Pascal uważał, że nieskończoność nie powiększy się od dodania do niej jedności. W *Myślach* utożsamiał on nieskończoność z nicością:

> „Nieskończoność – nic. Dusza nasza zabłąkała się w ciało, gdzie znajduje liczbę, czas, wymiary, rozumuje o tym, co nazywa naturą, koniecznością, i nie może wierzyć w nic innego.
>
> Jedność dodana do nieskończoności nie pomnaża jej o włos, tak jak stopa dodana do nieskończonej miary. Skończoność unicestwia się w obliczu nieskończoności i staje się czystą nicością. Tak nasz duch w obliczu Boga; tak nasza sprawiedliwość wobec sprawiedliwości boskiej. Mniejsza jest dysproporcja między sprawiedliwością naszą a boską niż między jednością a nieskończonością. Sprawiedliwość Boga musi być olbrzymia, jak Jego miłosierdzie” [5].

5. Gottfried Leibniz

Wraz z rozwojem rachunku różniczkowego i całkowego, pojawił się problem wielkości nieskończenie małych. W ramach analizy matematycznej, na początku siedemnastego wieku powstały dwa typy wielkości nieskończenie małych: wielkości aktualnie nieskończenie małe

---

[4] Pascal, *Rozważania ogólne nad geometrią. O geometrycznym sposobie myślenia i o sztuce przekonywania, w: Rozprawy i listy*, Instytut Wydawniczy PAX, Warszawa 1962, tłum. M. Tazbir [5].
[5] Pascal, *Myśli*, Instytut Wydawniczy PAX, Warszawa 1972, tłum. T. Żeleński [5].

i wielkości potencjalnie nieskończenie małe. Gottfried Leibniz (1646 – 1716) jako jeden z twórców rachunku różniczkowego i całkowego aprobował wprowadzenie wielkości nieskończenie małych. Nie uważał ich jednak za realnie istniejące liczby, a jedynie za wzór czegoś idealnego, niemającego odpowiednika w rzeczywistości. Leibniz był przekonany o istnieniu nieskończoności aktualnej w różnych dziedzinach filozofii:

> „Wierzę tak bardzo w aktualną nieskończoność, iż zamiast utrzymywać, jak to się pospolicie mówi, że natura się jej boi, przyjmuję, iż ona wszędzie ku niej się skłania, aby tym lepiej zaznaczyć doskonałość swego Stwórcy” [6],

jednak nie przyjmował jej istnienia w matematyce, opowiadał się jedynie za istnieniem nieskończoności potencjalnej zakładając, że dla rachunku nieskończonościowego wystarczające są zawsze dowolnie małe, ale skończone wielkości rzeczywiste:

> „Nie posiadamy idei nieskończonej przestrzeni i nic nie daje się bardziej odczuć, jak absurdalność aktualnej idei liczby nieskończonej” [7].

6. Immanuel Kant

We wczesnym okresie swojej twórczości Immanuel Kant (1724 – 1804) podał następującą definicję nieskończoności:

> „To, co nieskończone, jest tą wielkością spośród innych, która nie zmniejsza się poprzez odcięcie części skończonej” [8].

Oznacza to, że wielkość, od której odejmowano, pozostaje po odjęciu części skończonej taka sama. Definicja ta w intuicyjny sposób określa definicję zbioru nieskończonego, podaną ponad sto lat później przez R. Dedekinda.

Kant nie był przekonany o nieistnieniu nieskończoności aktualnej. Nieskończoność aktualną określał jako ideę rozumu. Mówił, że jest ona pojęciem wewnętrznie niesprzecznym, ale nieuchwytnym w świecie zmysłowym, ponieważ nie może ona zostać skonstruowana ani spostrzeżona. Kant tłumaczył, że można skonstruować na przykład liczbę 5 i dostrzec pięć rzeczy materialnych. Można też skonstruować liczbę 10^{1000}, mimo iż nikt nie będzie w stanie dostrzec tak wielu rzeczy materialnych. Nie można natomiast skonstruować ani spostrzec zbioru aktualnie nieskończonego. Immanuel Kant podkreślał różnicę pomiędzy nieskończonością aktualną, której nie można skonstruować, ale jest potrzebna w matematyce, a nieskończonością potencjalną, która może być skonstruowana, albo też jest w trakcie konstrukcji. Według Kanta nieskończoność aktualna jest potrzebna w matematyce, ponieważ uzupełnia to, co konkretne.

7. Bernard Bolzano

Rozwiązywaniem problemów związanych z nieskończonością w matematyce i różnych paradoksów, do których ona prowadzi zajmował się Bernard Bolzano (1781 – 1848) w swoim najważniejszym dziele *Paradoksy nieskończoności*. Bolzano twierdził, że większość paradoksów spotykanych w matematyce albo bezpośrednio zawiera pojęcie nieskończoności, albo bazuje na próbach jej dowodzenia.

---

[6] Leibniz, *Opera ognia, studio Ludovico Dutens* [5].
[7] Leibniz, *Nowe rozważania dotyczące rozumu ludzkiego*, PWN, Warszawa 1955, tłum. I. Dąmbska [5].
[8] Kant, *Allgemeine Naturgeschichte und Theorie des Himmels*, tłum. I. Dąmbska [1].

W przeciwieństwie do Mikołaja z Kuzy, Bolzano nieskończoność wywodził ze skończoności:

> „O tym, że to, co nieskończone, przeciwstawiało się wszystkiemu, co jest skończone, mówi już sam termin. Okoliczność, że nazwę pierwszego – nieskończony – wywodzimy z nazwy drugiego, wskazuje nadto, że również pojęcie nieskończoności przedstawiamy sobie jako takie, które wyłania się z pojęcia skończoności dopiero przez dodanie nowego składnika (takim jest zresztą samo pojęcie zaprzeczenia)” [9].

Bolzano zdefiniował pojęcie wielości:

> „…taką wielość, która jest większa od każdej wielości skończonej, tzn. jest tego rodzaju, iż każda skończona mnogość przedstawia tylko jej część, będę nazywał wielością nieskończoną” [9],

oraz wielkości nieskończenie małej i wielkości nieskończenie wielkiej:

> „Jeśli znajdzie się wielkość większą od każdej z tych wielkości, które zostały obrane za jednostkę nazywa ją nieskończenie wielką; jeśli zaś znajdzie tak małą, że każda jej wielokrotność mniejsza jest od jednostki – nazywa ja nieskończenie małą” [9].

Bolzano zwrócił uwagę na, paradoksalna jego zdaniem, właściwość wielości nieskończonych polegającą na tym, iż każdy nieskończony zbiór można jednoznacznie odwzorować pewną jego częścią właściwą:

> „Dwie mnogości, obie nieskończone, mogą pozostawać względem siebie w takim stosunku, że z jednej strony każdy element należący do jednej z tych mnogości można złączyć w parę z jednym elementem drugiej, tak że żaden element którejkolwiek z nich nie pozostaje bez włączenia go w parę, jak również żaden nie powtarza się w dwu lub więcej parach; z drugiej jednak strony możliwe jest przy tym, że jedna z tych mnogości zawiera drugą jako pewną część jedynie” [9].

8. Georg Cantor

Georg Cantor (1845 – 1918) w ramach utworzonej przez siebie teorii mnogości prowadził rozważania na temat zbiorów nieskończonych. Podobnie jak Arystoteles, Cantor rozróżniał nieskończoność aktualną i potencjalną. Jednakże uważał, że nieskończoność potencjalna w ogóle nie zasługuje na miano nieskończoności. Wyróżniał on trzy rodzaje nieskończoności aktualnej:

- nieskończoność absolutną (*Absolut*) – realizowana tylko w Bogu,
- nieskończoność w świecie stworzonym,
- nieskończoność *in abstracto* – będąca wielkością matematyczną.

Dwie ostatnie nieskończoności określał jedna nazwą *pozaskończoność* ściśle przeciwstawiając je *Absolutowi.* Był przekonany o istnieniu nieskończoności aktualnej:

> „W każdym z tych trzech przypadków na pytanie o możliwość istnienia nieskończoności aktualnej można odpowiedzieć „tak” lub „nie”; w ten sposób otrzymujemy osiem różnych punktów widzenia, które wszystkie reprezentowane były w filozofii; spośród

[9] Bolzano, *Paradoksy nieskończoności*, PWN, Warszawa 1966, tłum. Ł. Pakalska [5].

nich reprezentuję osobiście ten, który we wszystkich trzech przypadkach udziela odpowiedzi bezwzględnie pozytywnej” [10].

Przyjmując istnienie nieskończoności aktualnej, Cantor przeciwstawiał się wprowadzaniu do matematyki wielkości aktualnie nieskończenie małych nazywając je „wielkościami papierowymi”[6].

9. Bertrand Russell

Bertrand Russell (1872 – 1970) rozważał problem wprowadzonych przez Greków wielkości nieskończenie małych traktujących okrąg jako różniący się nieskończenie mało od wielokąta posiadającego bardzo dużą liczbę bardzo małych boków. Trudność polegała na zdefiniowaniu, czym są rzeczywiście wielkości nieskończenie małe:

> „Oczywiście nie były one zerem, bo okazało się, że dostatecznie duża liczba nieskończenie małych dodanych do siebie dawała skończoną wielkość całkowitą. Nikt nie potrafił jednak wskazać ułamka, który nie byłby zerem, a jednocześnie nie byłby skończony” [11].

Wyeliminowanie nieskończenie małych z matematyki dokonane przez Weierstrassa przyniosło wiele dziwnych konsekwencji, którymi zajmował się Russell. Jako przykład można podać podział materii na nieskończenie wiele części, podział, który nigdy nie doprowadzi do pojedynczych punktów:

> „Jeżeli jakiś kawałek materii podzielić na dwie połowy, potem każdą z tych części znów na dwie połowy itd., to części te będą coraz to mniejsze i teoretycznie mogą być uczynione dowolnie małymi. Jakkolwiek jednak byłyby małe, mogą być zawsze podzielone jeszcze na połowę i uczynione jeszcze mniejszymi. Zawsze jednak będą miały pewną skończoną wielkość, jakkolwiek małymi byłyby. Nigdy nie osiągniemy w ten sposób nieskończenie małych i żadna skończona ilość podziałów nie doprowadzi do pojedynczych punktów. Mimo to istnieja jednak pojedyncze punkty, ale nie mogą być one osiągnięte za pomocą kolejnych podziałów” [11].

Russell opowiadał się za negatywnością filozofii nieskończenie małych i pozytywnością nieskończenie wielkich:

> „Filozofia nieskończenie małych jest, jak właśnie stwierdziliśmy, w istocie negatywna. Ludzie przywykli do tego, by w nią wierzyć, a teraz odkryli swój błąd. Z drugiej strony filozofia nieskończoności jest w pełni pozytywna” [11].

10. David Hilbert

David Hilbert (1862 – 1943) zajmował się problemem kontinuum materii zauważając, że wszędzie w fizyce napotyka się na granice podzielności – materia składa się z atomów, elektryczność z pozytywnych i negatywnych elektronów, a energia z kwantów energii:

> „Wniosek jest taki, że nigdzie nie da się znaleźć jednorodnego kontinuum, które dopuszczałoby nieograniczoną podzielność i w ten sposób realizowało nieskończenie małe.

[10] Cantor, *Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten,* Zeitschrift f. Philosophie und philos. Kritik 91 (1887), tłum. R. Murawski [5].
[11] Russell, *Mathematics and the Methaphysicians*, w: *Mysticism and Logic and other Essays*, George Allen & Unwin Ltd., London 1949, tłum. R. Murawski [5].

Nieskończona podzielność kontinuum jest operacją istniejącą tylko w myślach, jest tylko ideą, której przeczą nasze obserwacje przyrody i doświadczenia fizyki i chemii" [12].

Hilbert uważał, że problem kontinuum wyróżnia się spośród innych problemów swoją jedynością i wewnętrznym pięknem. Rozwiązał ten problem za pomocą stworzonej przez siebie teorii. Jego rozwiązanie wymagało nowych metod, bowiem stare okazały się niewystarczające. Udowodnił, że punkty odcinka mogą zostać policzone, ale za pomocą liczb tzw. drugiej klasy, czyli za pomocą liczenia poza nieskończoność przeliczalną.

Przyjmując, że nie istnieją wielkości aktualnie nieskończenie małe, Hilbert zastanawiał się również nad tym, czy istnieją w rzeczywistości fizycznej wielkości aktualnie nieskończenie wielkie. Aby rozwiązać ten problem odwoływał się do dokonań współczesnej mu kosmologii stwierdzając, że należy badać rozciągłość świata, by stwierdzić czy istnieją w nim nieskończenie duże. Według Hilberta nieskończoność nie jest realizowana nigdzie w rzeczywistości.

11. Przykład numeryczny

Wyobraźmy sobie jakąś liczbę. Niech będzie to 10^{30}. Spróbujmy dodać do tej liczby jedność. Nie mamy w języku polskim jednolitych słów na określenie wyniku takiego działania, musimy powiedzieć: „dziesięć do potęgi trzydziestej plus jeden" i możemy to zapisać jako:

1000000000000000000000000000001.

Wykonując to samo obliczenie numerycznie, na przykład za pomocą wspomnianego we wstępie MATLABA, otrzymamy następujący wynik:

```
>> n=1e+30
n =
1000000000000000000000000000000
>> N=n+1
N =
1000000000000000000000000000000
```

To, że otrzymany wynik nie różni się niczym od liczby wejściowej, do której dodawana była jedność, nie oznacza oczywiście, iż MATLAB się myli, a wynika jedynie z błędu zaokrągleń używanej przez program reprezentacji zmiennoprzecinkowej. Przykład ten, uświadamia jednak, że już działania na dużych, aczkolwiek skończonych liczbach wprowadzają pewne niejednoznaczności. Cóż dopiero, jeżeli chcielibyśmy dodać jedność do nieskończoności. Ile jest nieskończoność plus jeden, i czy jest to nieskończoność plus jeden, czy też nadal nieskończoność? Odpowiedzi na to pytanie udziela Russell:

> „Oczywistość jest tylko błędnym ognikiem, który sprowadza nas z właściwej drogi, jeżeli tylko zawierzymy jego przewodnictwu. Na przykład nic nie wydaje się bardziej oczywiste jak to, że całość posiada zawsze więcej elementów niż cześć, czy też, że liczba zostanie powiększona, jeśli dodać do niej jedynkę. Wiemy jednak dziś, że zdania te są na ogół fałszywe. Większość liczb bowiem to liczby nieskończone, a jeśli taka liczba jest nieskończona, to można do niej dodawać jedynkę tak długo, jak długo ma się na to ochotę, a liczba ta w niczym się nie zmieni" [11].

[12] Hilbert, *Uber das Unendliche*, Mathematische Annalen 95 (1926), tłum. R. Murawski [5].

12. Zakończenie

Nieskończoność zaprząta myśli każdego człowieka. Pojawia się w matematyce, fizyce, kosmologii, ale również w codziennych rozważaniach ludzi niezwiązanych bezpośrednio z nauką. Rozum podpowiada, iż nieskończoność nie istnieje fizycznie, ale serce wyczuwa jej obecność każdego dnia. Poetycki obraz nieskończoności zawarty w wierszu Czesława Miłosza *Przypowieść o maku* [4] uświadamia nam, iż nasza ziemia może być jedynie ziarnkiem maku, a nasz wszechświat – jedną z niezliczonych makówek rosnących w jednym z ogrodów:

> Na ziarnku maku stoi mały dom,
> Pieski szczekają na księżyc makowy
> I nigdy jeszcze tym makowym psom,
> Że jest świat większy, nie przyszło do głowy.
>
> Ziemia to ziarnko - naprawdę nie więcej,
> A inne ziarnka - planety i gwiazdy.
> A choć ich będzie chyba sto tysięcy,
> Domek z ogrodem może stać na każdej.
>
> Wszystko w makówce. Mak rośnie w ogrodzie,
> Dzieci biegają i mak się kołysze.
> A wieczorami, o księżyca wschodzie
> Psy gdzieś szczekają, to głośniej, to ciszej.

Problem nieskończoności jest niezwykle istotny do rozważania i wyjaśniania, nie tylko dla naukowców, ale też dla ogółu ludzkości:

> „Ostateczne wyjaśnienie istoty nieskończoności stało się konieczne nie tylko w ramach specjalnych fachowych zainteresowań naukowych, ale konieczne jest dla uczczenia samego umysłu ludzkiego” [12].

Trudność w zrozumieniu nieskończoności polega na tym, iż nasza ludzka natura i nasz ziemski świat są skończone, zaś natura nieskończoności jest dla nas niewiadomą i niemożliwą do doświadczenia:

> „Znamy tedy istnienie i naturę skończoności, ponieważ sami jesteśmy skończeni i rozciągli jak ona. Znamy istnienie nieskończoności, ale nie znamy jej natury, ponieważ ona ma rozciągłość jak my, ale nie ma granic, jak my je mamy” [13].

Bibliografia

[1] Dadaczyński J. *Filozofia matematyki w ujęciu historycznym.* Wydawnictwo Diecezji Tarnowskiej BIBLOS, Tarnów, 2000.

[2] Heller M. *Filozofia przyrody. Zarys historyczny.* Wydawnictwo ZNAK, Kraków, 2004.

[3] Heller M. *Szczęście w przestrzeniach Banacha*, Wydawnictwo ZNAK, Kraków, 1997.

[4] Miłosz Cz. *Wiersze. Tom I.* Wydawnictwo ZNAK, 2001.

[5] Murawski R. *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych.* Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań, 1994.

[6] Murawski R. *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*. PWN, Warszawa 1995.

[13] Pascal, *Myśli*, Instytut Wydawniczy PAX, Warszawa 1972, tłum. T. Żeleński [5].